ĐỊNH LÝ CEVA VÀ ỨNG DỤNG

Nguyễn Minh Hiếu
(THPT Phan Đình Phùng)

Định lý Ceva là một định lý phổ biến trong hình học dùng để chứng minh ba đường thẳng đồng quy.

1 Định lý Ceva

Định lý 1.1 — Ceva. Gọi M,N,P là ba điểm tương ứng nằm trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Lúc đó, ba đường thẳng AM, BN, CP đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AP}{PB}=1.$$

Chứng minh

• **Phần thuận**: Giả sử AM, BN, CP đồng quy tại điểm O, ta cần chứng minh

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AP}{PB}=1.$$

Thật vậy, gọi H, K lần lượt là giao điểm của BN, CP với đường thẳng đi qua A và song song với BC. Theo định lý Thales, ta có

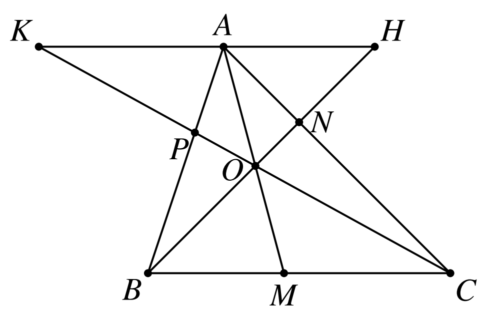
$$\frac{NC}{NA}=\frac{BC}{AH};\ \frac{PA}{PB}=\frac{AK}{BC}. \tag{1}$$

Và

$$\frac{AH}{MB}=\frac{AO}{OM}=\frac{AK}{MC}\Rightarrow\frac{MB}{MC}=\frac{AH}{AK} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AP}{PB}=\frac{AH}{AK}\cdot\frac{BC}{AH}\cdot\frac{AK}{BC}=1.$$



• **Phần đảo**: Giả sử $\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AP}{PB}=1$, ta cần chứng minh AM, BN, CP đồng quy.

Thật vậy, gọi I là giao điểm của AM và BN, P' là giao điểm của CI và AB. Khi đó theo chứng minh phần thuận ta có

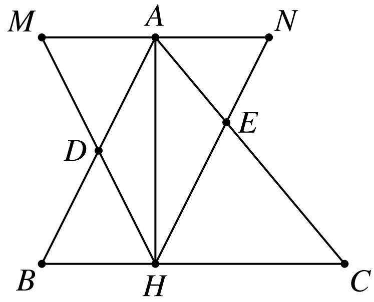
$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{P'A}{P'B} = 1 \tag{3}$$

Từ giả thiết và (3) ta có $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{P'A}{P'B} \Rightarrow P \equiv P'$. Vậy AM, BN, CP đồng quy tại I. ■

Ví dụ 1.1 Cho tam giác ABC đường cao AH. Lấy D, E theo thứ tự trên AB, AC sao cho AH là phân giác góc $\widehat{DHE}$. Chứng minh các đường thẳng AH, BE, CD đồng quy.

Lời giải

Gọi d là đường thẳng đi qua A và song song với BC và giả sử $d \cap HD = M, d \cap HE = N$.



Vì AH là phân giác của $\widehat{DHE}$ và $AH \perp MN$ nên $AM = AN$.
Theo định lý Thales, ta có

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AM}{BH}, \frac{CE}{EA} = \frac{HC}{AN}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BH}{HC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AM}{BH} \cdot \frac{BH}{HC} \cdot \frac{HC}{AN} = \frac{AM}{AN} = 1.$$

Vậy theo định lý Ceva, các đường thẳng AH, BE và CD đồng quy. ■

Ví dụ 1.2 Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác. Các đường thẳng AO, BO, CO lần lượt cắt các cạnh BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Điểm O_1 nằm trong tam giác $A_1B_1C_1$. Các đường thẳng AO_1, BO_1, CO_1 lần lượt cắt các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy.

Lời giải

Xét tam giác $A_1B_1C_1$, ta có

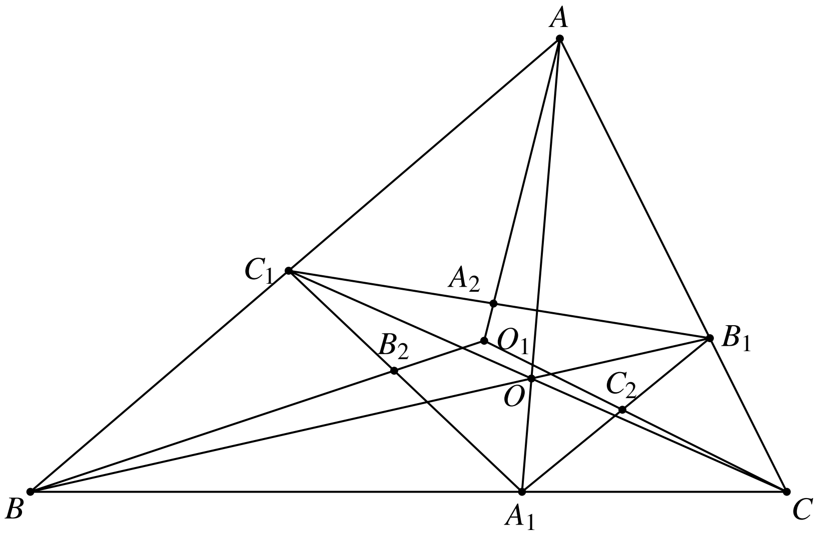
$$\begin{aligned}\frac{A_2B_1}{A_2C_1} \cdot \frac{B_2C_1}{B_2A_1} \cdot \frac{C_2A_1}{C_2B_1} &= \frac{S_{\triangle O_1AB_1}}{S_{\triangle O_1AC_1}} \cdot \frac{S_{\triangle O_1BC_1}}{S_{\triangle O_1BA_1}} \cdot \frac{S_{\triangle O_1CA_1}}{S_{\triangle O_1CB_1}} \\ &= \frac{S_{\triangle O_1CA_1}}{S_{\triangle O_1BA_1}} \cdot \frac{S_{\triangle O_1AB_1}}{S_{\triangle O_1CB_1}} \cdot \frac{S_{\triangle O_1BC_1}}{S_{\triangle O_1AC_1}} \\ &= \frac{A_1C}{A_1B} \cdot \frac{B_1A}{B_1C} \cdot \frac{C_1B}{C_1A}. \end{aligned} \tag{4}$$

Mặt khác các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại O nên ta có

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1. \tag{5}$$

Từ (4) và (5) ta có

$$\frac{A_2B_1}{A_2C_1} \cdot \frac{B_2C_1}{B_2A_1} \cdot \frac{C_2A_1}{C_2B_1} = 1.$$



Dễ thấy các điểm A_2, B_2, C_2 lần lượt nằm trên các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1.
Vậy theo định lý Ceva ta có các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy. ■

2 Định lý Ceva dạng lượng giác

Định lý 2.1 Gọi M, N, P là ba điểm tương ứng nằm trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Lúc đó, ba đường thẳng AM, BN, CP đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{\sin\widehat{MAB}}{\sin\widehat{MAC}}\cdot\frac{\sin\widehat{NBC}}{\sin\widehat{NBA}}\cdot\frac{\sin\widehat{PCA}}{\sin\widehat{PCB}}=1.$$

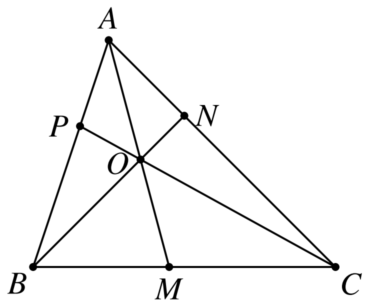
Chứng minh

Áp dụng định lý sin cho các tam giác ABM và ACM ta có

$$BM=\frac{AB\sin\widehat{MAB}}{\sin\widehat{AMB}};\ MC=\frac{AC\sin\widehat{MAC}}{\sin\widehat{AMC}}.$$

Vì $\sin\widehat{AMB}=\sin\widehat{AMC}$ nên suy ra

$$\frac{BM}{MC}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin\widehat{MAB}}{\sin\widehat{MAC}}. \tag{6}$$



Tương tự

$$\frac{CN}{NA}=\frac{BC}{AB}\cdot\frac{\sin\widehat{NBC}}{\sin\widehat{NBA}};\ \frac{AP}{PB}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{\sin\widehat{PCA}}{\sin\widehat{PCB}}. \tag{7}$$

Ba đường thẳng AM, BN, CP đồng quy nên theo định lý Ceva có

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AP}{PB}=1. \tag{8}$$

Từ (6), (7) và (8) ta có $\dfrac{\sin\widehat{MAB}}{\sin\widehat{MAC}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{NBC}}{\sin\widehat{NBA}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{PCA}}{\sin\widehat{PCB}}=1.$ ∎

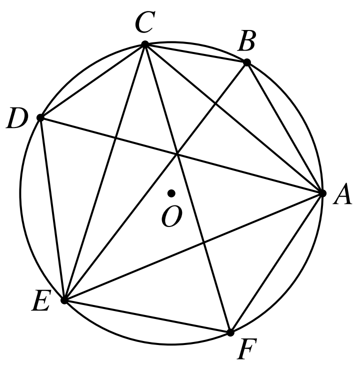
Ví dụ 2.1 Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=1.$$

Lời giải

Áp dụng định lý Ceva dạng lượng giác cho tam giác AEC, ta có DA, BE, CF đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{\sin\widehat{DAE}}{\sin\widehat{DAC}}\cdot\frac{\sin\widehat{BEC}}{\sin\widehat{BEA}}\cdot\frac{\sin\widehat{FCA}}{\sin\widehat{FCE}}=1. \tag{9}$$



Vì lục giác $ABCDEF$ nội tiếp nên theo định lý sin ta có

$$(9)\Leftrightarrow\frac{DE}{DC}\cdot\frac{BC}{BA}\cdot\frac{FA}{FE}=1\Leftrightarrow\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=1.$$

Vậy AD, BE, CF đồng quy khi và chỉ khi $\dfrac{AB}{BC}\cdot\dfrac{CD}{DE}\cdot\dfrac{EF}{FA}=1.$ ∎

3 Mở rộng định lý Ceva

Trong trường hợp tổng quát khi các điểm M, N, P không những nằm trên các cạnh BC, CA, AB mà nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB định lý được phát biểu như sau:

Định lý 3.1 Cho tam giác ABC và các điểm M,N,P khác A,B,C theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC,CA,AB. Khi đó các đường thẳng AM,BN,CP hoặc đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=-1.$$

Tương tự, định lý Ceva mở rộng dạng lượng giác được phát biểu như sau:

Định lý 3.2 Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P khác A, B, C theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó các đường thẳng AM, BN, CP hoặc đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi

$$\frac{\sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BC}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BA}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CB}\right)}=-1.$$

Việc chứng minh định lý cho trường hợp mở rộng xin dành cho bạn đọc.

Ví dụ 3.1 Cho hình bình hành $ABCD$. Các điểm M,N theo thứ tự thuộc các cạnh BC,CD. Các điểm I,J,K theo thứ tự là trung điểm của AM,MN,NA. Chứng minh rằng BI,CJ,DK đồng quy.

Lời giải

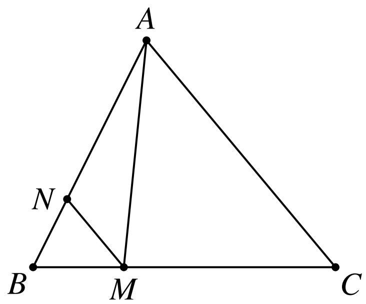
Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trên đường thẳng BC. Một vectơ $\overrightarrow{u}$ cùng phương với $\overrightarrow{AM}$ và thỏa mãn $\overrightarrow{u}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$, khi đó

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=-\frac{\beta}{\alpha}. \tag{10}$$

Thật vậy, trên AB lấy điểm N sao cho $MN//AC$, ta có

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NM}=\frac{\overline{AN}}{\overline{AB}}\overrightarrow{AB}+\frac{\overline{NM}}{\overline{AC}}\overrightarrow{AC}=\frac{\overline{MC}}{\overline{BC}}\overrightarrow{AB}+\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}}\overrightarrow{AC} \tag{11}$$



Mặt khác $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\overrightarrow{u}$ nên

$$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{u}=k\alpha\overrightarrow{AB}+k\beta\overrightarrow{AC} \tag{12}$$

Từ (11) và (12) với chú ý rằng $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ không cùng phương, ta có

$$\frac{\frac{\overline{MC}}{\overline{BC}}}{k\alpha}=\frac{\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}}}{k\beta}\Leftrightarrow\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Trở lại bài toán, giả sử $\overrightarrow{BM}=m\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DN}=n\overrightarrow{DC}$ và gọi X, Y, Z lần lượt là giao điểm của BI, CJ, DK với CD, DB, BC, ta có

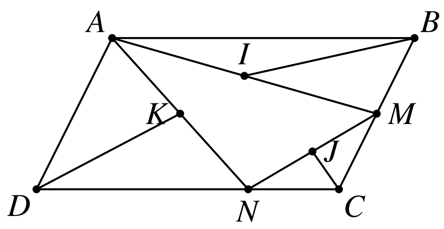
$$\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}\right)+\frac{m}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\frac{m-1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Theo bổ đề, ta có

$$\frac{\overline{XD}}{\overline{XC}} = -(m-1) = 1-m.$$

Tương tự

$$\frac{\overline{ZC}}{\overline{ZB}} = -\frac{1}{n-1} = \frac{1}{1-n}.$$



Lại có

$$\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(1-m)\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}(1-n)\overrightarrow{CD}.$$

Theo bổ đề, suy ra

$$\frac{\overline{YB}}{\overline{YD}} = -\frac{1-n}{1-m} = \frac{n-1}{1-m}.$$

Xét tam giác BCD có

$$\frac{\overline{XD}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{YB}}{\overline{YD}} \cdot \frac{\overline{ZC}}{\overline{ZB}} = (1-m) \cdot \frac{n-1}{1-m} \cdot \frac{1}{1-n} = -1.$$

Dễ thấy các đường thẳng BI, CJ, DK không thể đôi một song song.
Vậy theo định lý Ceva ta có các đường thẳng BI, CJ, DK đồng quy. ∎

BÀI TẬP

Bài tập 1 Chứng minh rằng trong một tam giác :
a) Ba đường trung tuyến đồng quy;
b) Ba đường phân giác đồng quy;
c) Ba đường cao đồng quy;
d) Ba đường trung trực đồng quy.

Bài tập 2 Cho tam giác ABC và đường tròn tâm I nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, AC và AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh các đường thẳng AD, BE và CF đồng quy tại một điểm.

Bài tập 3 Cho tam giác ABC lấy E, F, M thứ tự trên các cạnh AC, BC, AB sao cho EF song song BC, $MB = MC$. Chứng minh rằng CF, BE, AM đồng quy.

Bài tập 4 Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AK. Dựng bên ngoài tam giác những hình vuông $ABEF$ và $ACGH$. Chứng minh rằng AK, BG, CE đồng quy.

Bài tập 5 Chứng minh rằng trong một tam giác, ba đường thẳng nối trung điểm của mỗi cạnh với trung điểm của đoạn thẳng Ceva bất kỳ xuất phát từ đỉnh đối diện của cạnh đó đồng quy.

Bài tập 6 Cho tam giác ABC và đường tròn tâm I nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi D', E', F' lần lượt là điểm đối xứng của D, E, F qua I. Chứng minh AD', BE', CF' đồng quy.

Bài tập 7 Cho tam giác ABC. Đường tròn (O) cắt cạnh BC tại X,Y; cắt cạnh CA tại Z,T; cắt cạnh AB tại U,V sao cho $XYZTUV$ là các đỉnh của một lục giác lồi, $XT \cap YU = A'; ZV \cap TX = B'; UY \cap VZ = C'$. Chứng minh rằng AA', BB' và CC' đồng quy.

Bài tập 8 Cho hình bình hành $ABCD$. Các điểm X,Y,Z,T theo thứ tự thuộc các cạnh DA, AB, BC, CD sao cho

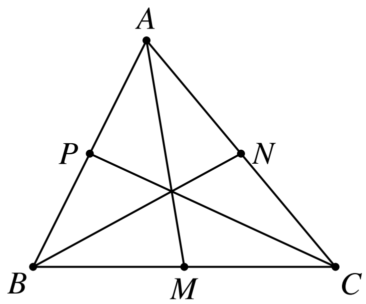
$$\frac{\overline{AX}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BY}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{CZ}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DT}}{\overline{DC}}.$$

Các đường thẳng Δ_1, Δ_2, Δ_3 lần lượt đi qua A, B, C và theo thứ tự song song với XT, YT, ZT. Chứng minh các đường thẳng Δ_1, Δ_2, Δ_3 đồng quy.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

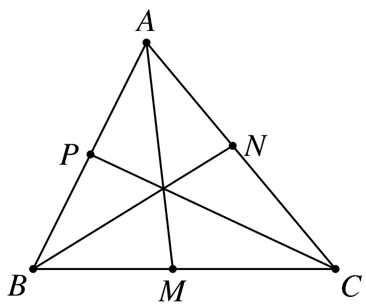
1 a) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, AC, AB, ta có

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1.1.1 = 1.$$



Vậy theo định lý Ceva, ba đường trung tuyến AM, BN, CP đồng quy.
b) Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường phân giác kẻ từ A, B, C.
Theo tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}; \frac{EC}{EA} = \frac{BC}{BA}; \frac{FA}{FB} = \frac{CA}{CB}.$$



Từ đó suy ra

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{CB} = 1.$$

Vậy theo định lý Ceva, ba đường phân giác AD, BE, CF đồng quy.
c) Gọi H, I, K lần lượt là chân ba đường cao kẻ từ A, B, C.

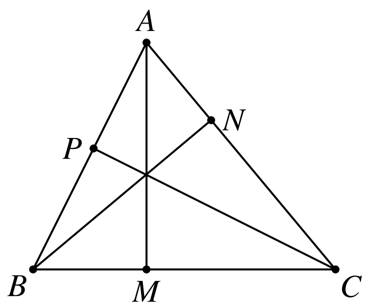
TH1: Tam giác ABC có ba góc đều nhọn, ta có

$$\triangle AKC \sim \triangle AIB \Rightarrow \frac{AK}{AI} = \frac{AC}{AB};$$
$$\triangle ABH \sim \triangle CBK \Rightarrow \frac{BH}{BK} = \frac{AB}{BC};$$
$$\triangle BCI \sim \triangle ACH \Rightarrow \frac{CI}{CH} = \frac{BC}{AC}.$$

Từ đó suy ra

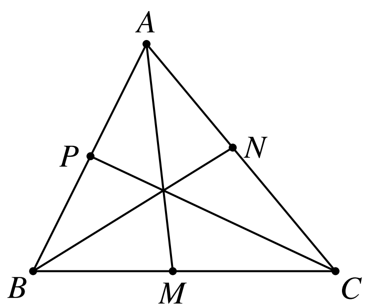
$$\frac{BH}{HC} \cdot \frac{CI}{IA} \cdot \frac{AK}{KB} = \frac{BH}{KB} \cdot \frac{CI}{HC} \cdot \frac{AK}{IA} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1.$$

Vậy theo định lý Ceva AH, BI, CK đồng quy.



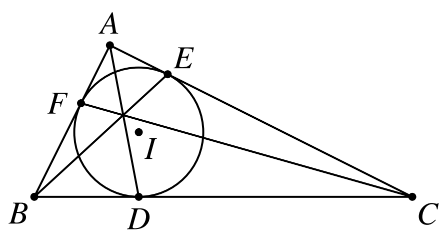
TH2: Tam giác ABC có một góc tù, giả sử góc A tù. Gọi $O = BI \cap CK$, xét $\triangle OBC$ có A là giao điểm của hai đường cao AB và AC. Hơn nữa $\triangle OBC$ có ba góc nhọn nên theo TH1 có AH là đường cao của $\triangle OBC$ hay $O \in AH$. Vậy AH, BI, CK đồng quy tại O.

d) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.



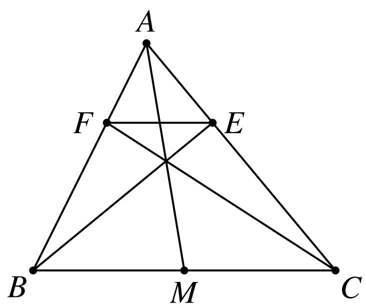
Giả sử a, b, c là ba đường trung trực của $\triangle ABC$. Khi đó a, b, c là ba đường cao của $\triangle MNP$ nên theo **câu c**, ta có a, b, c đồng quy.

2 Theo tính chất tiếp tuyến của đường tròn ta có $BD = BF$, $CD = CE$ và $AE = AF$.



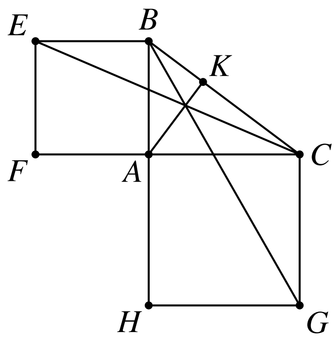
Từ đó suy ra $\dfrac{BD}{DC} \cdot \dfrac{CE}{EA} \cdot \dfrac{AF}{FB} = 1$. Vậy theo định lý Ceva, ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

3 Theo định lý Thales có
$$\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC}.$$



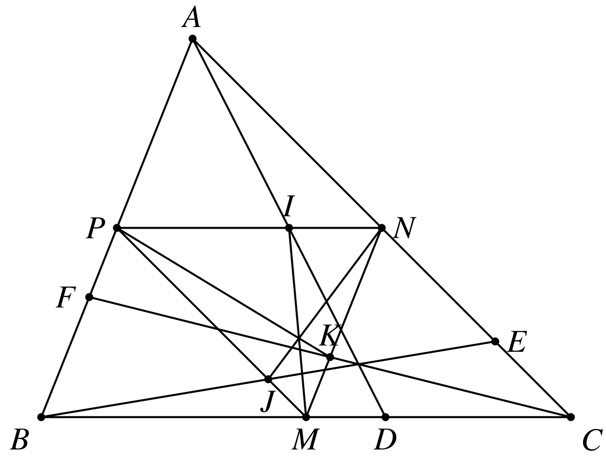
Từ đó suy ra
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$
Vậy theo định lý Ceva, ba đường thẳng CF, BE, AM đồng quy.

4 Trong tam giác ABC vuông tại A có
$$AB^2 = BK \cdot BC,\ AC^2 = KC \cdot BC \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BK}{KC}.$$



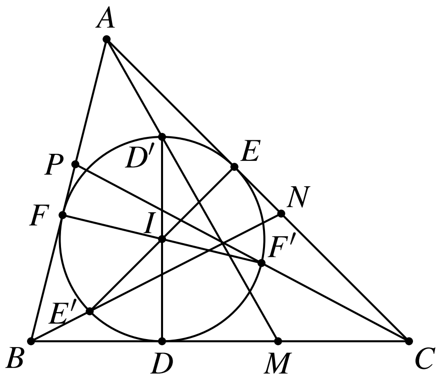
Gọi $D = AB \cap EC$, $I = AC \cap BG$, ta có
$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CI}{IA} = \frac{AC}{EB} \cdot \frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{CG}{AB} = 1.$$
Vậy theo định lý Ceva, ba đường thẳng AK, BG, CE đồng quy.

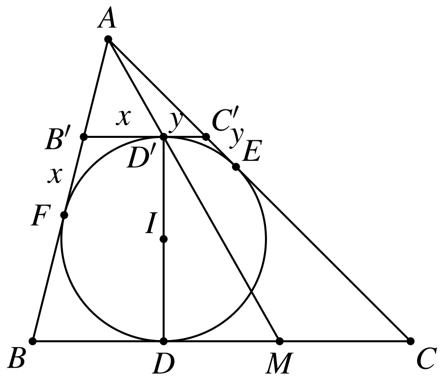
5 Xét tam giác ABC với ba đoạn thẳng Ceva AD, BE, CF đồng quy ta có
$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$
Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB và I, J, K lần lượt là trung điểm AD, BE, CF. Theo tính chất đường trung bình ta có I, J, K lần lượt nằm trên NP, PM, MN. Trong tam giác MNP ta có
$$\frac{PI}{IN} \cdot \frac{NK}{KM} \cdot \frac{MJ}{JP} = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$
Vậy theo định lý Ceva, ba đường thẳng MI, NJ, PK đồng quy.



6 Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của AD', BE', CF' với BC, CA, AB. Từ đó để chứng minh AD', BE', CF' đồng quy ta chứng minh

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1.$$





Qua D' kẻ tiếp tuyến với đường tròn (I) cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại B', C', ta có $B'C' // BC$. Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $B'F = B'D' = x$, $C'E = C'D' = y$, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, ta có $AB' = p - a - x, AC' = p - a - y$. Vì $B'C' // BC$ nên

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}.$$

Hay

$$\frac{x+y}{a} = \frac{p-a-x}{c} = \frac{p-a-y}{b} = \frac{2p-2a}{a+b+c} = \frac{p-a}{p}.$$

Từ đó tính được

$$x = \frac{(p-a)(p-c)}{p}, \ y = \frac{(p-a)(p-b)}{p}.$$

Suy ra

$$\frac{MB}{MC} = \frac{D'B'}{D'C'} = \frac{x}{y} = \frac{p-c}{p-b}. \tag{13}$$

Tương tự ta có

$$\frac{NC}{NA} = \frac{p-a}{p-c}, \ \frac{PA}{PB} = \frac{p-b}{p-a}. \tag{14}$$

Từ (13) và (14), ta có

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AP}{PB}=\frac{p-c}{p-b}\cdot\frac{p-a}{p-c}\cdot\frac{p-b}{p-a}=1.$$

Vậy theo định lý Ceva, ba đường thẳng AD', BE', CF' đồng quy.

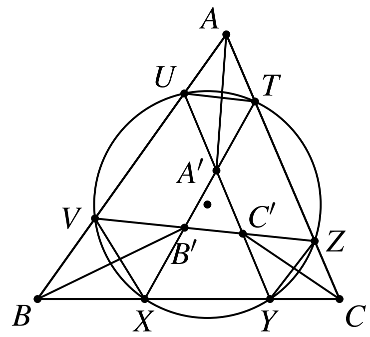
7 Xét tam giác AUT có AA', UA', TA' đồng quy tại A' nên theo định lý Ceva dạng lượng giác ta có

$$\frac{\sin\widehat{A'AU}}{\sin\widehat{A'AT}}\cdot\frac{\sin\widehat{A'UT}}{\sin\widehat{A'UA}}\cdot\frac{\sin\widehat{A'TA}}{\sin\widehat{A'TU}}=1.$$

Tương tự xét các tam giác BXV và CZY ta có

$$\frac{\sin\widehat{B'BX}}{\sin\widehat{B'BV}}\cdot\frac{\sin\widehat{B'XV}}{\sin\widehat{B'XB}}\cdot\frac{\sin\widehat{B'VB}}{\sin\widehat{B'VX}}=1;$$

$$\frac{\sin\widehat{C'CZ}}{\sin\widehat{C'CY}}\cdot\frac{\sin\widehat{C'ZY}}{\sin\widehat{C'ZC}}\cdot\frac{\sin\widehat{C'YC}}{\sin\widehat{C'YZ}}=1.$$



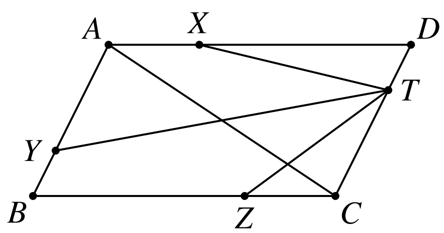
Nhân theo vế ba đẳng thức trên và rút gọn sin của các góc bù nhau ta được

$$\frac{\sin\widehat{A'AU}}{\sin\widehat{A'AT}}\cdot\frac{\sin\widehat{B'BX}}{\sin\widehat{B'BV}}\cdot\frac{\sin\widehat{C'CZ}}{\sin\widehat{C'CY}}=1.$$

Vậy theo định lý Ceva dạng lượng giác, ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

8 Đặt

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BY}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{CZ}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{DT}}{\overline{DC}}=k.$$



Giả sử Δ_1, Δ_2, Δ_3 theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại M, N, P, ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XT} &= \overrightarrow{XD}+\overrightarrow{DT}\\ &= (1-k)\overrightarrow{AD}+k\overrightarrow{DC}\\ &= (1-k)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)+k\overrightarrow{AB}\\ &= (2k-1)\overrightarrow{AB}+(1-k)\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Hơn nữa $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{XT}$ cùng phương nên theo bổ đề ta có

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\frac{1-k}{2k-1} = \frac{k-1}{2k-1}. \tag{15}$$

Lại có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{YT} &= \overrightarrow{YA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DT}\\ &= (1-k)\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{DC}\\ &= (1-k)\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}-k\overrightarrow{BA}\\ &= (1-2k)\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Hơn nữa $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{YT}$ cùng phương nên theo bổ đề ta có

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -\frac{1-2k}{1} = \frac{2k-1}{1}. \tag{16}$$

Tương tự

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ZT} &= \overrightarrow{ZC}+\overrightarrow{CT}\\ &= -k\overrightarrow{CB}+(1-k)\overrightarrow{CD}\\ &= -k\overrightarrow{CB}+(1-k)\left(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right)\\ &= (1-k)\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}.\end{aligned}$$

Hơn nữa $\overrightarrow{CP}$ và $\overrightarrow{ZT}$ cùng phương nên theo bổ đề ta có

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -\frac{-1}{1-k} = \frac{1}{1-k}. \tag{17}$$

Từ (15), (16), (17) ta có

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{k-1}{2k-1}\cdot\frac{2k-1}{1}\cdot\frac{1}{1-k} = -1.$$

Dễ thấy các đường thẳng Δ_1, Δ_2, Δ_3 không thể đôi một song song. Vậy theo định lý Ceva, các đường thẳng Δ_1, Δ_2, Δ_3 đồng quy.